

Recurring Decimals into Fractions

ہر تکراری اعشاریہ — چاہے کتنا ہی طویل اور پیچیدہ ہو — ایک کسر کے طور پر لکھا جاسکتا ہے۔ اس شیٹ کی مثالوں کی پیروی کریں تاکہ تکراری اعشاریوں کو کسروں میں بدلنا سیکھیں۔

Every recurring decimal — however long and however complicated — can be written as a fraction. Follow the examples in this sheet to learn how to convert recurring decimals to fractions.

Part 1: Reading and writing recurring decimals

جب آپ ایک پورے عدد کو دوسرے سے تقسیم کرتے ہیں، تو نقطے کے بعد والے ہندسے یا تو رک جاتے ہیں، یا ایک ایسے گروہ میں گرتے ہیں جو ہمیشہ دہرتا رہتا ہے۔ دہرائے جانے والے گروہوں کو پہلے ہندسے کے اوپر ایک نقطہ لگا کر ظاہر کیا جاتا ہے۔

When you divide one whole number by another, the digits after the point either stop, or fall into a block that repeats forever. Repeating blocks are marked with a dot over the first digit and a dot over the last digit.

the block that repeats

0 . $\overline{27}$ 2 7 2 7 2 7 2 7 ... so we write it $0.\dot{2}7$

تو $0.\dot{6} = 0.6666666\ldots$ ، $0.\dot{2}7 = 0.2727272\ldots$ ، $0.\dot{4}09 = 0.4094094\ldots$ اور $0.1\dot{6} = 0.1666666\ldots$ غور کریں کہ آخری میں صرف 6 پر نقطہ ہے، اس لیے صرف 6 دہرایا جاتا ہے۔ 1 صرف دہائیوں کے کالم میں پایا جاتا ہے، اور کبھی واپس نہیں آتا۔

So $0.\dot{6} = 0.6666666\ldots$ ، $0.\dot{2}7 = 0.2727272\ldots$ ، $0.\dot{4}09 = 0.4094094\ldots$ and $0.1\dot{6} = 0.1666666\ldots$ — notice that in the last one only the 6 carries a dot, so only the 6 repeats. The 1 only is found in the tenths column, and never comes back.

Q1. ہر عدد کے پہلے آٹھ اعشاریہ مقامات لکھیں۔

Write out the first eight decimal places of each number.

(a) $0.\dot{5} = 0.$ _____

(c) $0.3\dot{7} = 0.$ _____

(e) $0.45\dot{1} = 0.$ _____

(b) $0.1\dot{8} = 0.$ _____

(d) $0.\dot{2}0\dot{6} = 0.$ _____

(f) $0.\dot{9} = 0.$ _____

Q2. ان میں سے ہر ایک کو نقطہ علامت استعمال کرتے ہوئے لکھیں۔

Write each of these using dot notation.

(a) $0.8888 \dots =$ _____

(c) $0.24444 \dots =$ _____

(e) $0.91666 \dots =$ _____

(b) $0.636363 \dots =$ _____

(d) $0.157157 \dots =$ _____

(f) $0.40505 \dots =$ _____

Q3. (a) کون بڑا ہے، $0.4\dot{5}$ یا 0.45 ؟ فیصلہ کرنے میں مدد کے لیے دونوں کو چھ اعشاریہ مقامات تک لکھیں، اور اپنا جواب سمجھائیں۔

Which is bigger, $0.4\dot{5}$ or 0.45 ? Write both out to six decimal places to help you decide, and explain your answer.

(b) ایک تکراری اعشاریہ لکھیں جو $0.\dot{3}$ اور 0.4 کے درمیان ہو۔

Write down a recurring decimal that lies between $0.\dot{3}$ and 0.4 .

Part 2: Finding fractions from recurring decimals

ترکیب یہ ہے کہ دو ایسے اعداد تلاش کریں جن کے تکراری دم (tails) بالکل یکساں ہوں، اور پھر ایک کو دوسرے سے تفریق کریں۔ دم کٹ جاتے ہیں، اور جو بچتا ہے اس میں کوئی اعشاریہ نہیں ہوتے۔

The trick is to find two numbers whose recurring tails are **exactly the same**, and then subtract one from the other. The tails cancel, and what is left has no decimals in it at all.

ایسا کرنے کے لیے ہمیں ایک متغیر استعمال کرنا ہوگا، جسے ہم x کہیں گے۔ اس تکراری اعشاریہ کی نمائندگی کرتا ہے جسے ہم کسر میں بدلنے کی کوشش کر رہے ہیں۔

To do this we have to use an **algebraic variable**, which we will call x . x stands for the **recurring decimal** we are trying to convert to a **fraction**.

Worked example: turn 0.4 into a fraction

پہلا قدم — متعارف کریں ہم $x = 0.4$ لکھتے ہیں، تو $x = 0.4444 \dots$

Step 1 — introduce x We write $x = 0.4$, so $x = 0.4444 \dots$

دوسرا قدم — مقامی قدریں سرکائیں۔ 10 سے ضرب دینے سے ہر ہندسہ ایک مقام بائیں طرف سرک جاتا ہے:

$$10x = 4.4444 \dots \quad (\text{یاد رکھیں } 10x = 10 \times x)$$

Step 2 — shift the place values. Multiplying by 10 moves every **digit** one place to the left:

$$10x = 4.4444 \dots \quad (\text{remember } 10x = 10 \times x).$$

تیسرا قدم — تفریق کریں۔ دونوں دم یکساں ہیں، اس لیے تفریق کرنے پر وہ کٹ جاتے ہیں: $10x - x$.

Step 3 — subtract. The two tails are identical, so they cancel out when we subtract: $10x - x$.

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 4 \cdot 444444 \dots \\ x & = & 0 \cdot 444444 \dots \\ \hline 9x & = & 4 \cdot 000000 \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{the shaded tails are the same digits in the same} \\ \text{columns, so they subtract to nothing} \end{array}$$

$$\text{تو } 10x - x = 4, \text{ جس کا مطلب ہے } 9x = 4$$

So $10x - x = 4$, which means $9x = 4$.

چوتھا قدم — حل کریں۔ ہمارے پاس x کے 9 حصے ہیں، اس لیے ہم دونوں اطراف کو 9 سے تقسیم کرتے ہیں:

Step 4 — solve. We have 9 lots of x , so we divide both sides by 9:

$$\begin{array}{c} 9x = 4 \\ \div 9 \quad \curvearrowright \quad \div 9 \\ x = \frac{4}{9} \end{array}$$

Q4. خالی جگہیں بھریں تاکہ 0.7 کو کسر میں بدلا جاسکے۔

Fill in the gaps to turn 0.7 into a **fraction**.

پہلا قدم x متعارف کریں ہم $x = 0.7$ لکھتے ہیں، تو $x =$ _____

Step 1 — introduce x We write $x = 0.\dot{7}$, so $x =$ _____

دوسرا قدم - مقامی قدریں سرکائیں - 10 سے ضرب دینے سے ہر ہندسہ ایک مقام بائیں طرف سرک جاتا ہے:

$(10x = 10 \times x \text{ یاد رکھیں}) 10x = \underline{\hspace{2cm}}$

Step 2 — shift the place values. Multiplying by 10 moves every digit one place to the left:

$10x = \underline{\hspace{2cm}}$ (remember $10x = 10 \times x$).

تیسرا قدم - تفریق کریں۔ دونوں دم یکساں ہیں، اس لیے تفریق کرنے پر وہ کٹ جاتے ہیں: $10x - x$.

Step 3 — subtract. The two tails are identical, so they cancel out when we subtract: $10x - x$.

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & \text{---} \cdot \boxed{} \dots \\ x & = & 0 \cdot \boxed{} \dots \\ \hline 9x & = & \text{---} \cdot \boxed{} \dots \end{array}$$

the shaded tails are the same digits in the same columns, so they subtract to nothing

تو $10x - x =$ _____، جس کا مطلب ہے $-9x =$ _____

So $10x - x = \underline{\hspace{2cm}}$, which means $9x = \underline{\hspace{2cm}}$.

چوتھا قدم۔ حل کریں۔ ہمارے پاس x کے _____ حصے ہیں، اس لیے ہم دونوں اطراف کو _____ سے تقسیم کرتے ہیں۔ اپنا حل کام شدہ مثال کی طرح لکھیں۔

Step 4 — solve. We have ____ lots of x , so we divide both sides by _____. Set your working out like the worked example.

Q5. 0.8 کو کسریں بدلیں، وہی چار قدم استعمال کرتے ہوئے۔

Turn 0.8 into a fraction, using the same four steps.

پہلا قدم x متعارف کریں

Step 1 — introduce x

دوسرا قدم — مقامی قدریں سرکائیں۔

Step 2 — shift the place values.

تیسرا قدم — تفریق کریں۔ دونوں دم یکساں ہیں، اس لیے تفریق کرنے پر وہ کٹ جاتے ہیں: $10x - x$.

Step 3 — subtract. The two tails are identical, so they cancel out when we subtract: $10x - x$.

$$\begin{array}{r} 10x = \text{---} \cdot \text{-----} \dots \\ x = \text{---} 0 \cdot \text{-----} \dots \\ \hline 9x = \text{---} \cdot \text{-----} \dots \end{array}$$

the shaded tails are the same digits in the same columns, so they subtract to nothing

تو $10x - x = \text{-----}$ ، جس کا مطلب ہے $-9x = \text{-----}$

So $10x - x = \text{-----}$, which means $9x = \text{-----}$.

چوتھا قدم — حل کریں۔ دونوں اطراف کو ----- سے تقسیم کریں۔

Step 4 — solve. Divide both sides by ----- .

Q6. ان میں سے ہر ایک کو سادہ ترین صورت میں کسریں بدلیں۔ ہر بار چاروں قدم لکھیں۔

Turn each of these into a fraction in its simplest form. Write out all four steps each time.

(a) $0.\dot{2}$

(b) $0.\dot{5}$

(c) $0.\dot{6}$

(d) $0.\dot{3}$

Part 3: Longer repeating blocks

$0.\dot{3}6$ کو اسی طرح آزمائیں اور دم کٹتے نہیں ہیں۔ 10 سے ضرب دینے سے مقامی قدریں ایک جگہ سرک جاتی ہیں، جس سے گروہ کے دو ہندسے غلط ترتیب میں آ جاتے ہیں۔ دو ہندسوں کے گروہ کو دو مقامی قدروں سے سرکانا ہوتا ہے، اس لیے ہم اس کے بجائے 100 سے ضرب دیتے ہیں۔

Try $0.\dot{3}6$ the same way and the tails do not cancel. Multiplying by 10 shifts the **place values** by one, which puts the two **digits** of the block the wrong way round. A block of *two* **digits** has to be shifted by *two* **place values**, so we multiply by 100 instead.

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 3 \cdot 6 \ 3 \ 6 \ 3 \dots \\ x & = & 0 \cdot 3 \ 6 \ 3 \ 6 \dots \end{array}$$

tails differ — nothing cancels

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 36 \cdot 3 \ 6 \ 3 \ 6 \dots \\ x & = & 0 \cdot 3 \ 6 \ 3 \ 6 \dots \end{array}$$

tails match — these cancel

Worked example: turn $0.\dot{3}6$ into a **fraction**

پہلا قدم — متعارف کریں $x = 0.\dot{3}6$ ، تو $x = 0.363636\dots$

دوسرا قدم — مقامی قدریں سرکائیں۔ $100x = 36.363636\dots$ گروہ 2 ہندسوں کا ہے

تیسرا قدم — تفریق کریں۔ $100x - x = 36$ تو $99x = 36$

چوتھا قدم — حل کریں۔ $x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$

Step 1 — introduce x $x = 0.\dot{3}6$, so $x = 0.363636\dots$

Step 2 — shift the **place values**. $100x = 36.363636\dots$ the block is 2 **digits** long

Step 3 — subtract. $100x - x = 36$ so $99x = 36$

Step 4 — solve. $x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$

Q7. خالی جگہیں بھریں تاکہ $0.\dot{7}2$ کو کسریں بدلا جاسکے۔

Fill in the gaps to turn $0.\dot{7}2$ into a **fraction**.

$$x = 0.727272\dots$$

Step 1 — introduce x

پہلا قدم — متعارف کریں

$$x = 0.727272\dots$$

دوسرا قدم — مقامی قدریں سرکائیں۔ گروہ _____ ہندسوں کا ہے، تو $x = \underline{\hspace{2cm}}$

Step 2 — shift the **place values**. The block is _____ **digits** long, so $x = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\underline{\hspace{2cm}} x = \underline{\hspace{2cm}}$$

Step 3 — subtract.

$$x = \underline{\hspace{2cm}}$$

Step 4 — solve.

تیسرا قدم — تفریق کریں۔

$$\underline{\hspace{2cm}} x = \underline{\hspace{2cm}}$$

چوتھا قدم — حل کریں۔

$$x = \underline{\hspace{2cm}}$$

Q8. انہیں سادہ ترین صورت میں کسروں میں بدلیں۔ حصہ (e) میں تین ہندسوں کا گروہ ہے، اس لیے سوچیں کہ کس سے ضرب دینا ہے۔

Turn these into **fractions** in their **simplest form**. Part (e) has a block of three **digits**, so think about what to multiply by.

(a) $0.\dot{1}5$

(b) $0.\dot{0}6$

(c) $0.\dot{5}4$

(d) $0.\dot{9}0$

(e) $0.\dot{1}08$

Q9. (a) اپنے الفاظ میں سمجھائیں کہ آپ کیسے فیصلہ کرتے ہیں کہ x کو کس سے ضرب دینا ہے۔

Explain, in your own words, how you decide what to multiply x by.

(b) کیلا 0.12 کو تبدیل کرتی ہے اور $\frac{12}{99}$ حاصل کرتی ہے۔ بین وہی عدد تبدیل کرتا ہے اور $\frac{4}{33}$ حاصل کرتا ہے۔ کون صحیح ہے؟

Kayla converts 0.12 and gets $\frac{12}{99}$. Ben converts the same number and gets $\frac{4}{33}$. Who is right?

Part 4: When the repeating part does not start straight away

0.16 زیادہ مشکل ہے، کیونکہ 1 دہائیوں کے کالم میں ہے اور دہرایا نہیں جاتا۔ 10 سے ضرب دینے سے ایسا عدد ملتا ہے جس کا دم تمام چھکے ہیں، لیکن وہ دم x کے اپنے دم سے میل نہیں کھاتا۔ اس کے بجائے ہم مقامی قدروں کو دو بار سرکاتے ہیں، اور دو نتائج کو ایک دوسرے سے تفریق کرتے ہیں۔

0.16 is harder, because the 1 is in the tenths column and does not repeat. Multiplying by 10 gives a number whose tail is all sixes, but that tail does not match the tail of x itself. Instead we shift the **place values** *twice*, and subtract the two results from each other.

$x =$	0 · 1 6 6 6 6 ···	the tail of x starts with a 1, so it will
$10x =$	1 · 6 6 6 6 6 ···	never match
$100x =$	16 · 6 6 6 6 6 ···	these two match , so subtract these two

Worked example: turn $0.1\dot{6}$ into a fraction

پہلا قدم — متعارف کریں $x = 0.1\dot{6}$ ، تو $x = 0.16666\ldots$

دوسرا قدم — مقامی قدریں سرکائیں۔ $10x = 1.6666\ldots$ سے آگے سرکائیں

$100x = 16.6666\ldots$ ایک اور مقام سرکائیں

تیسرا قدم — تفریق کریں۔ $100x - 10x = 16 - 1 = 15$ تو $90x = 15$

چوتھا قدم — حل کریں۔ $x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

Step 1 — introduce x $x = 0.1\dot{6}$, so $x = 0.16666\ldots$

Step 2 — shift the place values. $10x = 1.6666\ldots$ shift past the 1
 $100x = 16.6666\ldots$ shift one more place

Step 3 — subtract. $100x - 10x = 16 - 1 = 15$ so $90x = 15$

Step 4 — solve. $x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

Q10. خالی جگہیں بھریں تاکہ $0.2\dot{7}$ کو کسریں بدلا جاسکے۔

Fill in the gaps to turn $0.2\dot{7}$ into a fraction.

$x = 0.27777\ldots$

Step 1 — introduce x

پہلا قدم — متعارف کریں

$x = 0.27777\ldots$

$10x = \underline{\hspace{2cm}}$

دوسرا قدم — مقامی قدریں سرکائیں۔ 2 سے آگے سرکائیں:

Step 2 — shift the place values. Shift past the 2:

$10x = \underline{\hspace{2cm}}$

$100x = \underline{\hspace{2cm}}$

ایک اور مقام سرکائیں:

Shift one more place:

$100x = \underline{\hspace{2cm}}$

$100x - 10x = \underline{\hspace{2cm}}$

تیسرا قدم — تفریق کریں۔

Step 3 — subtract.

$100x - 10x = \underline{\hspace{2cm}}$

$90x = \underline{\hspace{2cm}}$

تو

so

$90x = \underline{\hspace{2cm}}$

$x = \underline{\hspace{2cm}}$

چوتھا قدم — حل کریں۔

Step 4 — solve.

$x = \underline{\hspace{2cm}}$

Q11. انہیں سادہ ترین صورت میں کسروں میں بدلیں۔ (d) میں دہرایا جانے والا گروہ دو ہندسوں کا ہے، اس لیے غور سے سوچیں کہ x کے کون سے دو ضرب استعمال کرنے ہیں۔

Turn these into fractions in their simplest form. In (d) the repeating block is two digits long, so think carefully about which two multiples of x you need.

- (a) $0.4\dot{3}$ (b) $0.58\dot{3}$ (c) $0.08\dot{3}$ (d) $0.12\dot{4}$

Q12. وہی چار قدم اس وقت بھی کام کرتے ہیں جب عدد 1 سے بڑا ہو۔ انہیں سادہ ترین صورت میں غیر مناسب کسروں میں بدلیں۔

The same four steps work when the number is bigger than 1. Turn these into improper fractions in their simplest form.

- (a) $2.\dot{7}$ (b) $1.4\dot{5}$ (c) $3.1\dot{8}$

Q13. مخلوط مشق۔ خود فیصلہ کریں کہ ہر بار کس سے ضرب دینا ہے۔ ہر جواب کو سادہ کریں۔

Mixed practice. Decide for yourself what to multiply by each time. Simplify every answer.

- (a) $0.\dot{8}$ (c) $0.2\dot{5}$ (e) $0.7\dot{2}$ (g) $0.41\dot{6}$
 (b) $0.6\dot{3}$ (d) $0.02\dot{7}$ (f) $0.1\dot{2}$ (h) $0.06\dot{4}$

Part 5: Challenges

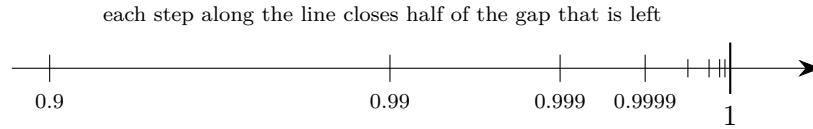
Q14. 0.9 کی قدر۔ حصہ 2 کے چار قدم $x = 0.9$ پر استعمال کریں۔ آپ کو کون سی کسر ملتی ہے؟

The value of 0.9. Use the four steps from Part 2 on $x = 0.9$. What fraction do you get?

(a)

ایلا کہتی ہے: "یہ غلط ہونا چاہیے۔ $0.9999 \dots$ ظاہر ہے 1 سے تھوڑا کم ہے۔" نیچے دی گئی عددی لکیر 0.9، پھر 0.99، پھر 0.999، اور اسی طرح نشان زد کرتی ہے۔ اسے استعمال کریں، اس حقیقت کے ساتھ کہ $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$ ، اور ایلا کو جواب لکھیں۔

Ella says: "That has to be wrong. $0.9999 \dots$ is obviously a bit less than 1." The number line below marks 0.9, then 0.99, then 0.999, and so on. Use it, together with the fact that $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, to write a reply to Ella.



(c) سب سے بڑا عدد کون سا ہے جو 1 سے چھوٹا ہو؟ سمجھائیں۔

What is the largest number that is smaller than 1? Explain.

Q15. کون سی کسریں دہرائی جاتی ہیں؟ کچھ کسریں ایسے اعشاریے دیتی ہیں جو رک جاتے ہیں۔ انہیں ختم ہونے والے اعشاریے کہا جاتا ہے۔ اور کچھ ایسے اعشاریے دیتی ہیں جو ہمیشہ دہراتے رہتے ہیں۔

Which fractions recur? Some fractions give decimals that stop — these are called *terminating decimals* — and some give decimals that recur forever.

(a) مختصر تقسیم استعمال کرتے ہوئے جدول مکمل کریں۔ ختم ہونے والوں پر دائرہ لگائیں۔

Complete the table using short division. Circle the terminating ones.

$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1}{3} =$	$\frac{1}{4} =$	$\frac{1}{5} =$	$\frac{1}{6} =$	$\frac{1}{7} =$
$\frac{1}{8} =$	$\frac{1}{9} =$	$\frac{1}{10} =$	$\frac{1}{11} =$	$\frac{1}{12} =$	$\frac{1}{16} =$

(b) ہر ختم ہونے والے مخرج کو اس کے مفرد عوامل کے حاصل ضرب کے طور پر لکھیں۔ ان سب میں کیا مشترک ہے؟

Write each terminating denominator as a product of its prime factors. What do they all have in common?

(c) تقسیم کیے بغیر اندازہ لگائیں کہ ان میں سے ہر ایک ختم ہوتا ہے یا دہرایا جاتا ہے، اور بتائیں کہ آپ کیسے جانتے ہیں۔

Without dividing, predict whether each of these terminates or recurs, and say how you know.

$$\frac{1}{15} \quad \frac{1}{40} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{64}$$

(d) مخرج میں صرف 2 اور 5 ہونے سے اعشاریہ کیوں رک جاتا ہے؟ اشارہ: 2×5 میں کیا خاص ہے؟

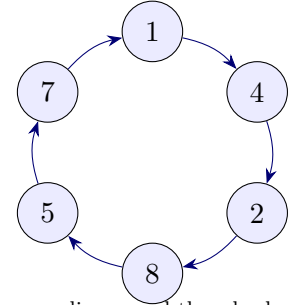
Why does having only 2s and 5s in the denominator make the decimal stop? *Hint: what is special about 2×5 ?*

Q16. ساتواں حصہ۔ ایک ساتواں حصہ چھ ہندسوں کا دہرایا جانے والا گروہ رکھتا ہے: $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$

Sevenths. One seventh has a repeating block of six digits: $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$.

(a) مختصر تقسیم استعمال کرتے ہوئے $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ اور $\frac{6}{7}$ کو تکراری اعشاریوں کے طور پر معلوم کریں۔

Use short division to work out $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ and $\frac{6}{7}$ as recurring decimals.



reading round the wheel from a different starting digit gives a different seventh

(b) آپ نے کیا محسوس کیا؟ جو ہوتا ہے اسے بیان کرنے کے لیے پہیے کو استعمال کریں۔

What do you notice? Use the wheel to describe what happens.

(c) 0.285714 پر چار قدم استعمال کرتے ہوئے اسے واپس کسریں بدلیں، اور جانچیں کہ یہ حصہ (a) کے آپ کے جواب سے مطابقت رکھتا ہے۔

Use the four steps on 0.285714 to turn it back into a fraction, and check that it agrees with your answer to part (a).

اپنا بنائیں۔ ایک تکراری اعشاریہ بنائیں جو مخرج 11 والی کسر میں تبدیل ہو۔ دکھائیں کہ یہ کام کرتا ہے۔ Q17.

Make your own. Invent a **recurring decimal** that converts to a **fraction** with **denominator** 11. Show that it works.

(a)

وہ تکراری اعشاریہ تلاش کریں جو بالکل $\frac{5}{6}$ ہو، پھر چار قدم استعمال کرتے ہوئے اسے واپس $\frac{5}{6}$ میں بدلیں۔ (b)

Find the **recurring decimal** that is exactly $\frac{5}{6}$, then use the four steps to turn it back into $\frac{5}{6}$.

کیا ہر تکراری اعشاریہ کسی کسر کے برابر ہوتا ہے؟ اپنے الفاظ میں سمجھائیں کہ تفریق ہمیشہ کیوں کام کرتی ہے، چاہے (c) آپ کسی بھی تکراری اعشاریہ سے شروع کریں۔

Is *every* **recurring decimal** equal to a **fraction**? Explain, in your own words, why the subtraction always works, whatever **recurring decimal** you start with.

بین کہتا ہے: " $\pi = 3.14159 \dots$ " ہمیشہ چلتا رہتا ہے، اس لیے کوئی تکراری اعشاریہ ضرور ہوگا جو بالکل π کے (d) برابر ہو۔" حصہ (c) کے اپنے جواب کا استعمال کرتے ہوئے سمجھائیں کہ بین غلط کیوں ہے۔

Ben says: " $\pi = 3.14159 \dots$ goes on forever, so there must be a **recurring decimal** that is exactly equal to π ." Use your answer to part (c) to explain why Ben is wrong.

Answers

سوال 1- (a) 0.55555555 (b) 0.18181818 (c) 0.37777777 (d) 0.20620620 (e) 0.45151515 (f) 0.99999999

Q1. (a) 0.55555555 (b) 0.18181818 (c) 0.37777777 (d) 0.20620620 (e) 0.45151515 (f) 0.99999999

سوال 2- (a) 0.8 (b) 0.63 (c) 0.24 (d) 0.157 (e) 0.405 (f) 0.916

Q2. (a) 0.8 (b) 0.63 (c) 0.24 (d) 0.157 (e) 0.916 (f) 0.405

سوال 3- (a) $0.4\dot{5} = 0.455555$ اور $0.4\dot{5} = 0.454545$ اس لیے $0.4\dot{5}$ بڑا ہے۔ وہ دو اعشاریہ مقامات تک متفق ہیں، لیکن تیسرا ہندسہ 5 بمقابلہ 4 ہے۔ (b) بہت سے جوابات، مثلاً $0.3\dot{5} = 0.353535 \dots$

Q3. (a) $0.4\dot{5} = 0.454545$ and $0.4\dot{5} = 0.455555$, so $0.4\dot{5}$ is bigger — they agree to two decimal places, but the third digit is 5 against 4. (b) Many answers, for example $0.3\dot{5} = 0.353535 \dots$

سوال 4- $9x = 7$; $10x - x = 7$; $10x = 7.7777 \dots$; $x = \frac{7}{9}$

Q4. $10x = 7.7777 \dots$; $10x - x = 7$; $9x = 7$; $x = \frac{7}{9}$

سوال 5- $10x = 8.8888 \dots$; $x = 0.8888 \dots$; $10x - x = 8$; $9x = 8$; $x = \frac{8}{9}$

Q5. $x = 0.8888 \dots$; $10x = 8.8888 \dots$; $10x - x = 8$, so $9x = 8$; $x = \frac{8}{9}$

سوال 6- (a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{5}{9}$ (c) $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Q6. (a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{5}{9}$ (c) $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

سوال 7- گروہ 2 ہندسوں کا ہے، اس لیے 100 سے ضرب دیں: $x = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$; $99x = 72$; $100x = 72.727272 \dots$

Q7. The block is 2 digits long, so multiply by 100: $100x = 72.727272 \dots$; $99x = 72$; $x = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$

سوال 8- (a) $\frac{15}{99} = \frac{5}{33}$ (b) $\frac{6}{99} = \frac{2}{33}$ (c) $\frac{54}{99} = \frac{6}{11}$ (d) $\frac{90}{99} = \frac{10}{11}$ (e) $\frac{108}{999} = \frac{4}{37}$ سے ضرب دینا

Q8. (a) $\frac{15}{99} = \frac{5}{33}$ (b) $\frac{6}{99} = \frac{2}{33}$ (c) $\frac{54}{99} = \frac{6}{11}$ (d)

$\frac{90}{99} = \frac{10}{11}$ (e) $\frac{108}{999} = \frac{4}{37}$, multiplying by 1000

سوال 9- (a) دہرائے جانے والے گروہ میں ہندسے گنیں۔ اگر n ہیں، تو 1 کے بعد n صفر سے ضرب دیں، تاکہ گروہ پوری بار سرک جائے اور دم دوبارہ سیدھ میں آجائیں۔ (b) دونوں صحیح ہیں: $\frac{12}{99} = \frac{4}{33}$ ۔ بین نے اسے سادہ کیا ہے، جو سوال مانگتا ہے۔

Q9. (a) Count the digits in the repeating block. If there are n of them, multiply by 1 followed by n zeros, so that the block shifts a whole number of times and the tails line up again. (b) Both are right: $\frac{12}{99} = \frac{4}{33}$. Ben has simplified his, which is what the question asks for.

سوال 10- $10x = 2.7777 \dots$; $100x = 27.7777 \dots$; $100x - 10x = 27 - 2 = 25$; $90x = 25$; $x = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$

Q10. $10x = 2.7777 \dots$; $100x = 27.7777 \dots$; $100x - 10x = 27 - 2 = 25$; $90x = 25$; $x = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$

سوال 11- (a) $\frac{39}{90} = \frac{13}{30}$ (b) $\frac{525}{900} = \frac{7}{12}$ (c) $\frac{75}{900} = \frac{1}{12}$ (d) $1000x - 10x = \frac{123}{990} = \frac{41}{330}$ استعمال کرتے ہوئے

Q11. (a) $\frac{39}{90} = \frac{13}{30}$ (b) $\frac{525}{900} = \frac{7}{12}$ (c) $\frac{75}{900} = \frac{1}{12}$ (d) $\frac{123}{990} = \frac{41}{330}$, using $1000x - 10x$

سوال 12- (a) $\frac{315}{99} = \frac{35}{11}$ (b) $\frac{144}{99} = \frac{16}{11}$ (c) $\frac{315}{99} = \frac{35}{11}$

Q12. (a) $\frac{25}{9}$ (b) $\frac{144}{99} = \frac{16}{11}$ (c) $\frac{315}{99} = \frac{35}{11}$

سوال 13- (a) $\frac{8}{9}$ (b) $\frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ (c) $\frac{23}{90}$ (d) $\frac{27}{999} = \frac{1}{37}$ (e) $\frac{65}{90} = \frac{13}{18}$ (f) $\frac{12}{99} = \frac{4}{33}$ (g) $\frac{375}{900} = \frac{5}{12}$ (h) $\frac{58}{900} = \frac{29}{450}$

Q13. (a) $\frac{8}{9}$ (b) $\frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ (c) $\frac{23}{90}$ (d) $\frac{27}{999} = \frac{1}{37}$ (e) $\frac{65}{90} = \frac{13}{18}$ (f) $\frac{12}{99} = \frac{4}{33}$ (g) $\frac{375}{900} = \frac{5}{12}$ (h) $\frac{58}{900} = \frac{29}{450}$

سوال 14- (a) $10x = 9.9999 \dots$ ، تو $9x = 9$ اور

(b) $-x = \frac{9}{9} = 1$ طریقہ درست ہے، اس لیے 0.9 واقعی 1 ہے۔ عددی لکیر پر ہر قدم جو بچا ہے اس کا آدھا بند کر دیتا ہے، اس لیے نشان 1 کے جتنے قریب چاہیں پہنچ جاتے ہیں۔ 0.9 اور 1 کے درمیان ان کے مختلف اعداد ہونے کی کوئی گنجائش نہیں بچتی۔ نیز $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$ اور دونوں اطراف کو 3 سے ضرب دینے پر $0.9 = 1$ ملتا

ہے۔ (c) کوئی نہیں ہے۔ آپ 1 سے نیچے جو بھی عدد بتائیں، اس کے اور 1 کے درمیان ہمیشہ ایک اور عدد ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ $0.\dot{9}$ کو 1 کے بالکل نیچے ہونے کے بجائے 1 ہونا ہی پڑتا ہے۔

Q14. (a) $10x = 9.9999\dots$, so $9x = 9$ and $x = \frac{9}{9} = 1$.
(b) The method is sound, so $0.\dot{9}$ really is 1. Every step along the number line closes half of what is left, so the marks get as close to 1 as you like — there is no room left between $0.\dot{9}$ and 1 for them to be different numbers. Also $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, and multiplying both sides by 3 gives $1 = 0.\dot{9}$. (c) There isn't one. Whatever number you name below 1, there is always another number between it and 1 — which is exactly why $0.\dot{9}$ has to be 1 rather than sit just below it.

سوال 15- (a) $\frac{1}{6} = 0.1\dot{6}$, $\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$ (b) $\frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{1}{9} = 0.\dot{1}$, $\frac{1}{8} = 0.125$, $\frac{1}{7} = 0.14285\dot{7}$
 $\frac{1}{16} = 0.0625$, $\frac{1}{12} = 0.08\dot{3}$, $\frac{1}{11} = 0.0\dot{9}$ ختم ہونے والے یہ ہیں: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{16}$ (b) $2, 2^2, 5, 2^3, 2 \times 5, 2^4$ — ہر ایک صرف 2 اور 5 سے بنا ہے۔ (c) $\frac{1}{15}$ دہرایا جاتا ہے، کیونکہ $15 = 3 \times 5$ اور 3 کی اجازت نہیں؛ $\frac{1}{40}$ ختم ہوتا ہے، کیونکہ $40 = 2^3 \times 5$ ؛ $\frac{1}{35} = 5 \times 7$ دہرایا جاتا ہے، کیونکہ $35 = 5 \times 7$ ؛ $\frac{1}{64}$ ختم ہوتا ہے، کیونکہ $64 = 2^6$ (d) ختم ہونے والا اعشاریہ صرف 10، 100، 1000، ... کے اوپر ایک کسر ہوتا ہے، اور $10 = 2 \times 5$ ۔ اس لیے ایک کسر کو دس کی قوت کے اوپر دوبارہ لکھا جاسکتا ہے جب اس کا مخرج 2 اور 5 سے بنا ہو؛ کوئی اور مفرد عامل کبھی کٹ نہیں سکتا۔

Q15. (a) $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{1}{6} = 0.1\dot{6}$, $\frac{1}{7} = 0.14285\dot{7}$, $\frac{1}{8} = 0.125$, $\frac{1}{9} = 0.\dot{1}$, $\frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{1}{11} = 0.0\dot{9}$, $\frac{1}{12} = 0.08\dot{3}$, $\frac{1}{16} = 0.0625$. The terminating ones are $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{16}$. (b) $2, 2^2, 5, 2^3, 2 \times 5, 2^4$ — every one is built out of 2s and 5s only. (c) $\frac{1}{15}$ recurs, since $15 = 3 \times 5$ and the 3 is not allowed; $\frac{1}{40}$ terminates, since $40 = 2^3 \times 5$; $\frac{1}{35}$ recurs, since $35 = 5 \times 7$; $\frac{1}{64}$ terminates, since $64 = 2^6$. (d) A terminating decimal is just a fraction over 10, 100, 1000, ..., and $10 = 2 \times 5$. So a fraction can be rewritten over a power of ten exactly when its denominator is built from 2s and 5s; any other prime factor can never be cancelled away.

سوال 16- (a) $\frac{3}{7} = 0.42857\dot{1}$, $\frac{2}{7} = 0.28571\dot{4}$ (b) وہ $\frac{6}{7} = 0.85714\dot{2}$, $\frac{5}{7} = 0.71428\dot{5}$, $\frac{4}{7} = 0.57142\dot{8}$

سب وہی چھ ہندسے اسی چکری ترتیب میں استعمال کرتے ہیں، $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 1$ ؛ ہر ساتواں حصہ پیسے پر ایک مختلف جگہ سے شروع ہوتا ہے۔ (c) گروہ 6 ہندسوں کا ہے، اس لیے 1 000 000 سے ضرب دیں: اس سے

$999\,999x = 285\,714$ ملتا ہے، تو $x = \frac{285714}{999999} = \frac{2}{7}$ ، اوپر اور نیچے 142 857 سے تقسیم کرتے ہوئے۔

Q16. (a) $\frac{2}{7} = 0.28571\dot{4}$, $\frac{3}{7} = 0.42857\dot{1}$, $\frac{4}{7} = 0.57142\dot{8}$, $\frac{5}{7} = 0.71428\dot{5}$, $\frac{6}{7} = 0.85714\dot{2}$. (b) They all use the same six digits in the same cyclic order, $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 1$; each seventh simply starts at a different place on the wheel. (c) The block is 6 digits long, so multiply by 1 000 000: this gives $999\,999x = 285\,714$, so $x = \frac{285714}{999999} = \frac{2}{7}$, dividing top and bottom by 142 857.

سوال 17- (a) بہت سے جوابات۔ مثلاً $0.2\dot{7}$ سے $99x = 27$ ملتا ہے، تو $x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$ ؛ کوئی بھی دو ہندسوں کا گروہ جو 9 کا ضرب ہو لیکن 11 کا نہ ہو، چلے گا۔ (b) $\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$ اور جانچ: $100x - 10x = 83 - 8 = 75$ ، تو $90x = 75$ اور $x = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$ ۔ (c) ہاں۔ اعشاریہ جو بھی ہو، اسے دہرائے جانے والے گروہ کی لمبائی سے سرکانے پر ہمیشہ ایک دوسرا عدد ملتا ہے جس کا دم یکساں ہوتا ہے، اس لیے تقریق ہمیشہ ایک پورا عدد چھوڑتی ہے۔ اس سے (پورا عدد) $\times x =$ (پورا عدد) کی شکل کی مساوات ملتی ہے، اور تقسیم کرنے پر کسر ملتی ہے۔ (d) π کوئی کسر نہیں ہے، اور حصہ (c) ظاہر کرتا ہے کہ ہر تکراری اعشاریہ ایک کسر ہوتا ہے۔ اس لیے کوئی تکراری اعشاریہ π کے برابر نہیں ہو سکتا: اس کے ہندسے ہمیشہ چلتے رہتے ہیں اور کبھی دہرانے والے گروہ میں نہیں آتے۔

Q17. (a) Many answers. For example $0.2\dot{7}$ gives $99x = 27$, so $x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$; any two-digit block that is a multiple of 9 but not of 11 will do. (b) $\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$, and checking: $100x - 10x = 83 - 8 = 75$, so $90x = 75$ and $x = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$. (c) Yes. Whatever the decimal, shifting it by the length of the repeating block always produces a second number with an identical tail, so the subtraction always leaves a whole number. That gives an equation of the form (whole number) $\times x =$ (whole number), and dividing gives a fraction. (d) π is not a fraction, and part (c) shows that every recurring decimal is one. So no recurring decimal can equal π : its digits go on forever without ever settling into a repeating block.