

Zamiana ułamków okresowych na ułamki

Recurring Decimals into Fractions

Recurring Decimals into Fractions

Każdy ułamek okresowy — choćby długi i skomplikowany — można zapisać jako ułamek. Postępuj zgodnie z przykładami na tej karcie, aby nauczyć się zamieniać ułamki okresowe na ułamki.

Every recurring decimal — however long and however complicated — can be written as a fraction. Follow the examples in this sheet to learn how to convert recurring decimals to fractions.

Część 1: Czytanie i zapisywanie ułamków okresowych

Part 1: Reading and writing recurring decimals

Part 1: Reading and writing recurring decimals

Kiedy dzielisz jedną liczbę całkowitą przez drugą, cyfry po przecinku albo się kończą, albo tworzą blok, który powtarza się w nieskończoność. Powtarzające się bloki oznacza się kropką nad pierwszą cyfrą i kropką nad ostatnią cyfrą.

When you divide one whole number by another, the digits after the point either stop, or fall into a block that repeats forever. Repeating blocks are marked with a dot over the first digit and a dot over the last digit.

the block that repeats
 $0 \cdot \overbrace{2\ 7\ 2\ 7\ 2\ 7\ 2\ 7} \cdots$ so we write it $0.\dot{2}\dot{7}$

Zatem $0.\dot{6} = 0.666666\dots$, $0.\dot{2}\dot{7} = 0.272727\dots$, $0.\dot{4}0\dot{9} = 0.409409\dots$ oraz $0.1\dot{6} = 0.166666\dots$ — zauważ, że w ostatnim tylko 6 ma kropkę, więc tylko 6 się powtarza. 1 występuje tylko w kolumnie części dziesiątych i nigdy nie wraca.

So $0.\dot{6} = 0.666666\dots$, $0.\dot{2}\dot{7} = 0.272727\dots$, $0.\dot{4}0\dot{9} = 0.409409\dots$ and $0.1\dot{6} = 0.166666\dots$ — notice that in the last one only the 6 carries a dot, so only the 6 repeats. The 1 only is found in the tenths column, and never comes back.

Q1. Zapisz pierwsze osiem miejsc dziesiętnych każdej liczby.

Write out the first eight decimal places of each number.

- (a) $0.\dot{5} = 0.\underline{\hspace{2cm}}$ (c) $0.3\dot{7} = 0.\underline{\hspace{2cm}}$ (e) $0.4\dot{5}\dot{1} = 0.\underline{\hspace{2cm}}$
(b) $0.1\dot{8} = 0.\underline{\hspace{2cm}}$ (d) $0.\dot{2}0\dot{6} = 0.\underline{\hspace{2cm}}$ (f) $0.\dot{9} = 0.\underline{\hspace{2cm}}$

Q2. Zapisz każdą z tych liczb, używając notacji kropkowej.

Write each of these using dot notation.

(a) $0.8888\dots =$ _____ (c) $0.24444\dots =$ _____ (e) $0.91666\dots =$ _____

(b) $0.636363\dots =$ _____ (d) $0.157157\dots =$ _____ (f) $0.40505\dots =$ _____

Q3. (a) Co jest większe, $0.\dot{4}\dot{5}$ czy $0.4\dot{5}$? Zapisz obie liczby do sześciu miejsc dziesiętnych, aby pomóc sobie zdecydować, i wyjaśnij odpowiedź.

Which is bigger, $0.\dot{4}\dot{5}$ or $0.4\dot{5}$? Write both out to six decimal places to help you decide, and explain your answer.

(b) Zapisz ułamek okresowy, który leży między $0.\dot{3}$ a $0.\dot{4}$.

Write down a recurring decimal that lies between $0.\dot{3}$ and $0.\dot{4}$.

Część 2: Znajdowanie ułamków na podstawie ułamków okresowych

Part 2: Finding fractions from recurring decimals

Part 2: Finding fractions from recurring decimals

Sztuczka polega na znalezieniu dwóch liczb, których okresowe końcówki są dokładnie takie same, a następnie odjęciu jednej od drugiej. Kończówki się znoszą, a to, co zostaje, nie ma w ogóle części dziesiętnych.

The trick is to find two numbers whose recurring tails are **exactly the same**, and then subtract one from the other. The tails cancel, and what is left has no decimals in it at all.

Aby to zrobić, musimy użyć zmiennej algebraicznej, którą nazwiemy x . x oznacza ułamek okresowy, który próbujemy zamienić na ułamek.

To do this we have to use an **algebraic variable**, which we will call x . x stands for the recurring decimal we are trying to convert to a fraction.

Zamień $0.\dot{4}$ na ułamek

turn $0.\dot{4}$ into a fraction

Worked example: turn $0.\dot{4}$ into a fraction

Krok 1 — wprowadź x Piszemy $x = 0.\dot{4}$, więc $x = 0.4444\dots$

Step 1 — introduce x We write $x = 0.\dot{4}$, so $x = 0.4444\dots$

Krok 2 — przesunąć wartości pozycyjne. Mnożenie przez 10 przesuwa każdą cyfrę o jedno miejsce w lewo:

$10x = 4.4444\dots$ (pamiętaj $10x = 10 \times x$).

Step 2 — shift the place values. Multiplying by 10 moves every digit one place to the left:

$10x = 4.4444\dots$ (remember $10x = 10 \times x$).

Krok 3 — odejmij. Obie końcówki są identyczne, więc znoszą się, gdy odejmujemy: $10x - x$.

Step 3 — subtract. The two tails are identical, so they cancel out when we subtract: $10x - x$.

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 4 \cdot \overline{44444} \dots \\ x & = & 0 \cdot \overline{44444} \dots \\ \hline 9x & = & 4 \cdot 00000 \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{the shaded tails are the same digits in the same} \\ \text{columns, so they subtract to nothing} \end{array}$$

Zatem $10x - x = 4$, co oznacza $9x = 4$.

So $10x - x = 4$, which means $9x = 4$.

Krok 4 — rozwiąż. Mamy 9 razy x , więc dzielimy obie strony przez 9:

Step 4 — solve. We have 9 lots of x , so we divide both sides by 9:

$$\begin{array}{ccc} 9x & = & 4 \\ \div 9 \swarrow & & \searrow \div 9 \\ x & = & \frac{4}{9} \end{array}$$

Q4. Uzupełnij luki, aby zamienić $0.\dot{7}$ na ułamek.

Fill in the gaps to turn $0.\dot{7}$ into a fraction.

Krok 1 — wprowadź x Piszemy $x = 0.\dot{7}$, więc $x = \underline{\hspace{2cm}}$

Step 1 — introduce x We write $x = 0.\dot{7}$, so $x = \underline{\hspace{2cm}}$

Krok 2 — przesunąć wartości pozycyjne. Mnożenie przez 10 przesuwa każdą cyfrę o jedno miejsce w lewo:

$10x = \underline{\hspace{2cm}}$ (pamiętaj $10x = 10 \times x$).

Step 2 — shift the place values. Multiplying by 10 moves every digit one place to the left:

$10x = \underline{\hspace{2cm}}$ (remember $10x = 10 \times x$).

Krok 3 — odejmij. Obie końcówki są identyczne, więc znoszą się, gdy odejmujemy: $10x - x$.

Step 3 — subtract. The two tails are identical, so they cancel out when we subtract: $10x - x$.

$10x =$	$\text{---} \cdot$	_ _ _ _ _	$\cdots$	
$x =$	$\text{---} \cdot$	0	_ _ _ _ _	$\cdots$
$9x =$	$\text{---} \cdot$	$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$	$\cdots$	

the shaded tails are the same digits in the same columns, so they subtract to nothing

Zatem $10x - x =$ _____, co oznacza $9x =$ _____.

So $10x - x =$ _____, which means $9x =$ _____.

Krok 4 — rozwiąż. Mamy _____ razy x , więc dzielimy obie strony przez _____. Zapisz swoje obliczenia tak jak w przykładzie rozwiązania.

Step 4 — solve. We have _____ lots of x , so we divide both sides by _____. Set your working out like the worked example.

Q5. Zamień $0.\dot{8}$ na ułamek, używając tych samych czterech kroków.

Turn $0.\dot{8}$ into a fraction, using the same four steps.

Krok 1 — wprowadź x

Step 1 — introduce x

Krok 2 — przesun wartości pozycyjne.

Step 2 — shift the place values.

Krok 3 — odejmij. Obie końcówki są identyczne, więc znoszą się, gdy odejmujemy: $10x - x$.

Step 3 — subtract. The two tails are identical, so they cancel out when we subtract: $10x - x$.

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & \text{---} \cdot \text{-----} \cdots \\ x & = & 0 \cdot \text{-----} \cdots \\ \hline 9x & = & \text{---} \cdot \text{-----} \cdots \end{array}$$

the shaded tails are the same digits in the same columns, so they subtract to nothing

Zatem $10x - x = \text{---}$, co oznacza $9x = \text{---}$.

So $10x - x = \text{---}$, which means $9x = \text{---}$.

Krok 4 — rozwiąż. Podziel obie strony przez --- .

Step 4 — solve. Divide both sides by --- .

Q6. Zamień każdą z tych liczb na ułamek w najprostszej postaci. Za każdym razem zapisz wszystkie cztery kroki.

Turn each of these into a fraction in its simplest form. Write out all four steps each time.

(a) $0.\dot{2}$

(b) $0.\dot{5}$

(c) $0.\dot{6}$

(d) $0.\dot{3}$

Część 3: Dłuższe bloki powtarzające się

Part 3: Longer repeating blocks

Part 3: Longer repeating blocks

Spróbuj $0.\dot{3}\dot{6}$ w ten sam sposób, a końcówki się nie znoszą. Mnożenie przez 10 przesuwa wartości pozycyjne o jedno, co ustawia dwie cyfry bloku w złej kolejności. Blok dwóch cyfr trzeba przesunąć o dwie wartości pozycyjne, więc zamiast tego mnożymy przez 100.

Try $0.\dot{3}\dot{6}$ the same way and the tails do not cancel. Multiplying by 10 shifts the place values by one, which puts the two digits of the block the wrong way round. A block of *two* digits has to be shifted by *two* place values, so we multiply by 100 instead.

$$\begin{array}{rcl} 10x & = & 3 \cdot \boxed{6\ 3\ 6\ 3\ \dots} \\ x & = & 0 \cdot \boxed{3\ 6\ 3\ 6\ \dots} \end{array}$$

tails differ — nothing cancels

$$\begin{array}{rcl} 100x & = & 36 \cdot \boxed{3\ 6\ 3\ 6\ \dots} \\ x & = & 0 \cdot \boxed{3\ 6\ 3\ 6\ \dots} \end{array}$$

tails match — these cancel

Zamień $0.\dot{3}\dot{6}$ na ułamek

turn $0.\dot{3}\dot{6}$ into a fraction

Worked example: turn $0.\dot{3}\dot{6}$ into a fraction

Krok 1 — wprowadź x $x = 0.\dot{3}\dot{6}$, więc $x = 0.363636\dots$

Step 1 — introduce x $x = 0.\dot{3}\dot{6}$, so $x = 0.363636\dots$

Krok 2 — przesun wartości pozycyjne. $100x = 36.363636\dots$ Blok ma 2 cyfry długości.

Step 2 — shift the place values. $100x = 36.363636\dots$ the block is 2 digits long

Krok 3 — odejmij. $100x - x = 36$, więc $99x = 36$

Step 3 — subtract. $100x - x = 36$ so $99x = 36$

Krok 4 — rozwiąż. $x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$

Step 4 — solve. $x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$

Step 1 — introduce x $x = 0.\dot{3}\dot{6}$, so $x = 0.363636\dots$

Step 2 — shift the place values. $100x = 36.363636\dots$ the block is 2 digits long

Step 3 — subtract. $100x - x = 36$ so $99x = 36$

Step 4 — solve. $x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$

Q7. Uzupełnij luki, aby zamienić $0.\dot{7}\dot{2}$ na ułamek.

Fill in the gaps to turn $0.\dot{7}\dot{2}$ into a fraction.

Krok 1 — wprowadź x

$$x = 0.727272\dots$$

Step 1 — introduce x

$$x = 0.727272\dots$$

Krok 2 — przesun wartości pozycyjne. Blok ma _____ cyfr długości, więc

$$_____x = _____$$

Step 2 — shift the place values. The block is _____ digits long, so _____ $x =$ _____

Krok 3 — odejmij.

$$_____x = _____$$

Step 3 — subtract.

$$_____x = _____$$

Krok 4 — rozwiąż.

$$x = _____$$

Step 4 — solve.

$$x = _____$$

Q8. Zamień te liczby na ułamki w najprostszej postaci. Część (e) ma blok trzech cyfr, więc pomyśl, przez co pomnożyć.

Turn these into fractions in their simplest form. Part (e) has a block of three digits, so think about what to multiply by.

(a) $0.\dot{1}\dot{5}$

(b) $0.\dot{0}\dot{6}$

(c) $0.\dot{5}\dot{4}$

(d) $0.\dot{9}\dot{0}$

(e) $0.\dot{1}\dot{0}\dot{8}$

Q9. (a) Wyjaśnij własnymi słowami, jak decydujesz, przez co pomnożyć x .

Explain, in your own words, how you decide what to multiply x by.

(b) Kayla zamienia $0.\dot{1}\dot{2}$ i otrzymuje $\frac{12}{99}$. Ben zamienia tę samą liczbę i otrzymuje $\frac{4}{33}$. Kto ma rację?

Kayla converts $0.\dot{1}\dot{2}$ and gets $\frac{12}{99}$. Ben converts the same number and gets $\frac{4}{33}$. Who is right?

Część 4: Gdy powtarzająca się część nie zaczyna się od razu

Part 4: When the repeating part does not start straight away

Part 4: When the repeating part does not start straight away

$0.1\dot{6}$ jest trudniejsze, ponieważ 1 znajduje się w kolumnie części dziesiątych i się nie powtarza. Mnożenie przez 10 daje liczbę, której końcówka to same szóstki, ale ta końcówka nie pasuje do końcówki samego x . Zamiast tego przesuwamy wartości pozycyjne dwa razy i odejmujemy od siebie dwa wyniki.

$0.1\dot{6}$ is harder, because the 1 is in the tenths column and does not repeat. Multiplying by 10 gives a number whose tail is all sixes, but that tail does not match the tail of x itself. Instead we shift the place values twice, and subtract the two results from each other.

$x =$	$0 \cdot 1\ 6\ 6\ 6\ 6 \dots$	the tail of x starts with a 1, so it will
$10x =$	$1 \cdot 6\ 6\ 6\ 6\ 6 \dots$	never match
$100x =$	$16 \cdot 6\ 6\ 6\ 6\ 6 \dots$	these two match, so subtract these two

Zamień $0.1\dot{6}$ na ułamek

turn $0.1\dot{6}$ into a fraction

Worked example: turn $0.1\dot{6}$ into a fraction

Krok 1 — wprowadź x $x = 0.1\dot{6}$, więc $x = 0.16666\dots$

Step 1 — introduce x $x = 0.1\dot{6}$, so $x = 0.16666\dots$

Krok 2 — przesun wartości pozycyjne. $10x = 1.6666\dots$ przesun obok 1

Step 2 — shift the place values. $10x = 1.6666\dots$ shift past the 1

$100x = 16.6666\dots$ przesun o jeszcze jedno miejsce

$100x = 16.6666\dots$ shift one more place

Krok 3 — odejmij. $100x - 10x = 16 - 1 = 15$, więc $90x = 15$

Step 3 — subtract. $100x - 10x = 16 - 1 = 15$ so $90x = 15$

Krok 4 — rozwiąż. $x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

Step 4 — solve. $x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

Step 1 — introduce x $x = 0.1\dot{6}$, so $x = 0.16666\dots$

Step 2 — shift the place values. $10x = 1.6666\dots$ shift past the 1

$100x = 16.6666\dots$ shift one more place

Step 3 — subtract. $100x - 10x = 16 - 1 = 15$ so $90x = 15$

Step 4 — solve. $x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

Q10. Uzupełnij luki, aby zamienić $0.2\dot{7}$ na ułamek.

Fill in the gaps to turn $0.2\dot{7}$ into a fraction.

Krok 1 — wprowadź x

$x = 0.27777\dots$

Step 1 — introduce x

$x = 0.27777\dots$

Krok 2 — przesun wartości pozycyjne. Przesun obok 2:

$10x = \underline{\hspace{2cm}}$

Step 2 — shift the place values. Shift past the 2:

$10x = \underline{\hspace{2cm}}$

Przesun o jeszcze jedno miejsce:

$100x = \underline{\hspace{2cm}}$

Shift one more place:

$100x = \underline{\hspace{2cm}}$

Krok 3 — odejmij.

$100x - 10x = \underline{\hspace{2cm}}$

Step 3 — subtract.

$100x - 10x = \underline{\hspace{2cm}}$

więc

$90x = \underline{\hspace{2cm}}$

so

$90x = \underline{\hspace{2cm}}$

Krok 4 — rozwiąż.

$x = \underline{\hspace{2cm}}$

Step 4 — solve.

$x = \underline{\hspace{2cm}}$

Część 5: Wyzwania

Part 5: Challenges

Part 5: Challenges

Q14. Wartość $0.\dot{9}$.

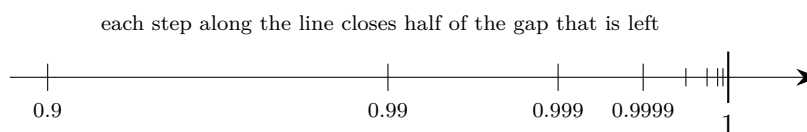
The value of $0.\dot{9}$.

- (a) Użyj czterech kroków z Części 2 dla $x = 0.\dot{9}$. Jaki ułamek otrzymujesz?

Use the four steps from Part 2 on $x = 0.\dot{9}$. What fraction do you get?

- (b) Ella mówi: “To musi być złe. $0.9999\dots$ jest oczywiście trochę mniejsze niż 1.” Oś liczbowa poniżej zaznacza 0.9, potem 0.99, potem 0.999, i tak dalej. Użyj jej, wraz z faktem, że $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, aby napisać odpowiedź Elli.

Ella says: “That has to be wrong. $0.9999\dots$ is obviously a bit less than 1.” The number line below marks 0.9, then 0.99, then 0.999, and so on. Use it, together with the fact that $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, to write a reply to Ella.



- (c) Jaka jest największa liczba mniejsza niż 1? Wyjaśnij.

What is the largest number that is smaller than 1? Explain.

Q15. Które **ułamki** są okresowe? Niektóre **ułamki** dają liczby dziesiętne, które się kończą — nazywa się je **ułamkami dziesiętnymi skończonymi** — a niektóre dają liczby dziesiętne, które powtarzają się w nieskończoność.

Which fractions recur? Some **fractions** give decimals that stop — these are called *terminating decimals* — and some give decimals that recur forever.

- (a) **Uzupełnij tabelę, używając dzielenia krótkiego. Zakreśl ułamki dziesiętne skończone.**

Complete the table using short division. Circle the *terminating decimals*.

$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1}{3} =$	$\frac{1}{4} =$	$\frac{1}{5} =$	$\frac{1}{6} =$	$\frac{1}{7} =$
$\frac{1}{8} =$	$\frac{1}{9} =$	$\frac{1}{10} =$	$\frac{1}{11} =$	$\frac{1}{12} =$	$\frac{1}{16} =$

- (b) **Zapisz każdy mianownik ułamka dziesiętnego skończonego jako iloczyn swoich czynników pierwszych. Co mają wszystkie wspólnego?**

Write each terminating **denominator** as a **product** of its **prime factors**. What do they all have in common?

- (c) **Nie dzieląc, przewidź, czy każda z tych liczb jest ułamkiem dziesiętnym skończonym, czy ułamkiem okresowym, i powiedz, skąd to wiesz.**

Without dividing, predict whether each of these terminates or recurs, and say how you know.

$$\frac{1}{15} \quad \frac{1}{40} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{64}$$

- (d) **Dlaczego to, że w mianowniku są tylko 2 i 5, sprawia, że liczba dziesiętna się kończy? Wskazówka: co jest szczególnego w 2×5 ?**

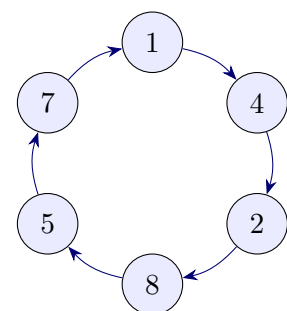
Why does having only 2s and 5s in the denominator make the decimal stop? *Hint: what is special about 2×5 ?*

Q16. Siódme. Jedna siódma ma powtarzający się blok sześciu **cyfr**: $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$.

Sevenths. One seventh has a repeating block of six **digits**: $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$.

- (a) **Użyj dzielenia krótkiego, aby obliczyć $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ i $\frac{6}{7}$ jako ułamki okresowe.**

Use short division to work out $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ and $\frac{6}{7}$ as **recurring decimals**.



reading round the wheel
from a different starting
digit gives a different seventh

- (b) **Co zauważasz? Użyj koła, aby opisać, co się dzieje.**

What do you notice? Use the wheel to describe what happens.

- (c) **Użyj czterech kroków dla $0.\dot{2}8571\dot{4}$, aby zamienić ją z powrotem na ułamek, i sprawdź, czy zgadza się to z twoją odpowiedzią do części (a).**

Use the four steps on $0.\dot{2}8571\dot{4}$ to turn it back into a **fraction**, and check that it agrees with your answer to part (a).

Q17. Stwórz własny.

Make your own.

- (a) Wymyśl ułamek okresowy, który zamienia się na ułamek o mianowniku 11. Pokaż, że to działa.

Invent a recurring decimal that converts to a fraction with denominator 11. Show that it works.

- (b) Znajdź ułamek okresowy, który jest dokładnie równy $\frac{5}{6}$, a następnie użyj czterech kroków, aby zamienić go z powrotem na $\frac{5}{6}$.

Find the recurring decimal that is exactly $\frac{5}{6}$, then use the four steps to turn it back into $\frac{5}{6}$.

- (c) Czy każdy ułamek okresowy jest równy ułamkowi? Wyjaśnij własnymi słowami, dlaczego odejmowanie zawsze działa, niezależnie od tego, od jakiego ułamka okresowego zaczynasz.

Is every recurring decimal equal to a fraction? Explain, in your own words, why the subtraction always works, whatever recurring decimal you start with.

- (d) Ben mówi: “ $\pi = 3.14159 \dots$ ciągnie się w nieskończoność, więc musi istnieć ułamek okresowy, który jest dokładnie równy π .” Użyj swojej odpowiedzi do części (c), aby wyjaśnić, dlaczego Ben się myli.

Ben says: “ $\pi = 3.14159 \dots$ goes on forever, so there must be a recurring decimal that is

exactly equal to π ." Use your answer to part (c) to explain why Ben is wrong.

Odpowiedzi

Answers

Answers

Q1. (a) 0.55555555 (b) 0.18181818 (c) **pyta pytanie.**

0.37777777 (d) 0.20620620 (e) 0.45151515 (f) 0.99999999

Q2. (a) $0.\dot{8}$ (b) $0.\dot{6}\dot{3}$ (c) $0.2\dot{4}$ (d) $0.\dot{1}5\dot{7}$ (e) $0.9\dot{1}\dot{6}$ (f) $0.4\dot{0}\dot{5}$

(a) $0.4\dot{5} = 0.454545$ i $0.4\dot{5} = 0.455555$, więc $0.4\dot{5}$ jest większe — zgadzają się do dwóch miejsc

dziesiętnych, ale trzecia cyfra to 5 przeciw 4.

(b) Wiele odpowiedzi, na przykład

$0.\dot{3}\dot{5} = 0.353535 \dots$

(a) $0.4\dot{5} = 0.454545$ and $0.4\dot{5} = 0.455555$, so $0.4\dot{5}$ is bigger — they agree to two decimal places, but the third digit is 5 against 4. (b) Many answers, for example $0.\dot{3}\dot{5} = 0.353535 \dots$

Q4. $10x = 7.7777 \dots$; $10x - x = 7$; $9x = 7$; $x = \frac{7}{9}$

$x = 0.8888 \dots$; $10x = 8.8888 \dots$; $10x - x = 8$, więc $9x = 8$; $x = \frac{8}{9}$

$x = 0.8888 \dots$; $10x = 8.8888 \dots$; $10x - x = 8$, so $9x = 8$; $x = \frac{8}{9}$

Q6. (a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{5}{9}$ (c) $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Blok ma 2 cyfry długości, więc pomnóż przez

100: $100x = 72.727272 \dots$; $99x = 72$; $x = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$

The block is 2 digits long, so multiply by 100: $100x = 72.727272 \dots$; $99x = 72$; $x = \frac{72}{99} = \frac{8}{11}$

(a) $\frac{15}{99} = \frac{5}{33}$ (b) $\frac{6}{99} = \frac{2}{33}$ (c) $\frac{54}{99} = \frac{6}{11}$ (d) $\frac{90}{99} = \frac{10}{11}$ (e) $\frac{108}{999} = \frac{4}{37}$, mnożąc przez 1000

(a) $\frac{15}{99} = \frac{5}{33}$ (b) $\frac{6}{99} = \frac{2}{33}$ (c) $\frac{54}{99} = \frac{6}{11}$ (d) $\frac{90}{99} = \frac{10}{11}$ (e) $\frac{108}{999} = \frac{4}{37}$, multiplying by 1000

(a) Policz cyfry w powtarzającym się bloku. Jeśli jest ich n , pomnóż przez 1 z n zerami, tak aby blok przesunął się całkowitą liczbę razy, a końcówki znów się wyrównały. (b) Obaj mają rację: $\frac{12}{99} = \frac{4}{33}$. Ben uproszczył swój ułamek, o co

(a) Count the digits in the repeating block. If there are n of them, multiply by 1 followed by n zeros, so that the block shifts a whole number of times and the tails line up again. (b) Both are right: $\frac{12}{99} = \frac{4}{33}$. Ben has simplified his, which is what the question asks for.

Q10. $10x = 2.7777 \dots$; $100x = 27.7777 \dots$; $100x - 10x = 27 - 2 = 25$; $90x = 25$; $x = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$

(a) $\frac{39}{90} = \frac{13}{30}$ (b) $\frac{525}{900} = \frac{7}{12}$ (c) $\frac{75}{900} = \frac{1}{12}$ (d) $\frac{123}{990} = \frac{41}{330}$, używając $1000x - 10x$

(a) $\frac{39}{90} = \frac{13}{30}$ (b) $\frac{525}{900} = \frac{7}{12}$ (c) $\frac{75}{900} = \frac{1}{12}$ (d) $\frac{123}{990} = \frac{41}{330}$, using $1000x - 10x$

Q12. (a) $\frac{25}{9}$ (b) $\frac{144}{99} = \frac{16}{11}$ (c) $\frac{315}{99} = \frac{35}{11}$

Q13. (a) $\frac{8}{9}$ (b) $\frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ (c) $\frac{23}{90}$ (d) $\frac{27}{999} = \frac{1}{37}$ (e) $\frac{65}{90} = \frac{13}{18}$ (f) $\frac{12}{99} = \frac{4}{33}$ (g) $\frac{375}{900} = \frac{5}{12}$ (h) $\frac{58}{900} = \frac{29}{450}$

(a) $10x = 9.9999 \dots$, więc $9x = 9$ i $x = \frac{9}{9} = 1$. (b) Metoda jest poprawna, więc $0.\dot{9}$ naprawdę jest równe 1. Każdy krok na osi liczbowej zamyka połowę tego, co zostało, więc zaznaczenia zbliżają się do 1 tak blisko, jak chcesz — nie ma miejsca między $0.\dot{9}$ a 1, aby były to różne liczby. Także $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, a pomnożenie obu stron przez 3 daje $1 = 0.\dot{9}$. (c) Nie ma takiej. Jakąkolwiek liczbę wskażesz poniżej 1, zawsze istnieje inna liczba między nią a 1 — i dokładnie dlatego $0.\dot{9}$ musi być 1, a nie leżeć tuż poniżej.

(a) $10x = 9.9999 \dots$, so $9x = 9$ and $x = \frac{9}{9} = 1$. (b) The method is sound, so $0.\dot{9}$ really is 1. Every step along the number line closes half of what is left, so the marks get as close to 1 as you like — there is no room left between $0.\dot{9}$ and 1 for them to be different numbers. Also $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, and multiplying both sides by 3 gives $1 = 0.\dot{9}$. (c) There isn't one. Whatever

number you name below 1, there is always another number between it and 1 — which is exactly why 0.9 has to *be* 1 rather than sit just below it.

(a) $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{1}{6} = 0.1\dot{6}$, $\frac{1}{7} = 0.14285\dot{7}$, $\frac{1}{8} = 0.125$, $\frac{1}{9} = 0.1\dot{1}$, $\frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{1}{11} = 0.0\dot{9}$, $\frac{1}{12} = 0.08\dot{3}$, $\frac{1}{16} = 0.0625$. **Ułamki dziesiętne skończone to** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{16}$. (b) 2, 2^2 , 5, 2^3 , 2×5 , 2^4 — każdy jest zbudowany tylko z 2 i 5. (c) $\frac{1}{15}$ jest okresowy, ponieważ $15 = 3 \times 5$ i 3 nie jest dozwolone; $\frac{1}{40}$ jest skończony, ponieważ $40 = 2^3 \times 5$; $\frac{1}{35}$ jest okresowy, ponieważ $35 = 5 \times 7$; $\frac{1}{64}$ jest skończony, ponieważ $64 = 2^6$. (d) **Ułamek dziesiętny skończony to po prostu ułamek o mianowniku** 10, 100, 1000, ..., a $10 = 2 \times 5$. Więc **ułamek** można przepisać jako **potęgę dziesiątki** dokładnie wtedy, gdy jego **mianownik** jest zbudowany z 2 i 5; żaden inny **czynnik pierwszy** nigdy nie może zostać skrócony.

(a) $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{1}{6} = 0.1\dot{6}$, $\frac{1}{7} = 0.14285\dot{7}$, $\frac{1}{8} = 0.125$, $\frac{1}{9} = 0.1\dot{1}$, $\frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{1}{11} = 0.0\dot{9}$, $\frac{1}{12} = 0.08\dot{3}$, $\frac{1}{16} = 0.0625$. The **terminating decimals** are $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{16}$. (b) 2, 2^2 , 5, 2^3 , 2×5 , 2^4 — every one is built out of 2s and 5s only. (c) $\frac{1}{15}$ recurs, since $15 = 3 \times 5$ and the 3 is not allowed; $\frac{1}{40}$ terminates, since $40 = 2^3 \times 5$; $\frac{1}{35}$ recurs, since $35 = 5 \times 7$; $\frac{1}{64}$ terminates, since $64 = 2^6$. (d) A **terminating decimal** is just a **fraction** over 10, 100, 1000, ..., and $10 = 2 \times 5$. So a **fraction** can be rewritten over a **power** of ten exactly when its **denominator** is built from 2s and 5s; any other **prime factor** can never be cancelled away.

(a) $\frac{2}{7} = 0.28571\dot{4}$, $\frac{3}{7} = 0.42857\dot{1}$, $\frac{4}{7} = 0.57142\dot{8}$, $\frac{5}{7} = 0.71428\dot{5}$, $\frac{6}{7} = 0.85714\dot{2}$. (b) Wszystkie używają tych samych sześciu **cyfr** w tej samej kolejności cyklicznej, $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 1$; każda siódma po prostu zaczyna się w innym miejscu na kole. (c) Blok ma 6 **cyfr** długości, więc pomnóż przez 1 000 000: to daje $999\,999x = 285\,714$, więc $x = \frac{285714}{999999} = \frac{2}{7}$, dzieląc **licznik i mianownik** przez

142 857.

(a) $\frac{2}{7} = 0.28571\dot{4}$, $\frac{3}{7} = 0.42857\dot{1}$, $\frac{4}{7} = 0.57142\dot{8}$, $\frac{5}{7} = 0.71428\dot{5}$, $\frac{6}{7} = 0.85714\dot{2}$. (b) They all use the same six **digits** in the same cyclic order, $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 1$; each seventh simply starts at a different place on the wheel. (c) The block is 6 **digits** long, so multiply by 1 000 000: this gives $999\,999x = 285\,714$, so $x = \frac{285714}{999999} = \frac{2}{7}$, dividing top and bottom by 142 857.

(a) Wiele odpowiedzi. Na przykład $0.2\dot{7}$ daje $99x = 27$, więc $x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$; każdy dwucyfrowy blok, który jest wielokrotnością 9, ale nie 11, będzie pasować. (b) $\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$, i sprawdzając: $100x - 10x = 83 - 8 = 75$, więc $90x = 75$ i $x = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$. (c) Tak. Niezależnie od liczby dziesiętnej, przesunięcie jej o długość powtarzającego się bloku zawsze daje drugą liczbę o identycznej końcówce, więc odejmowanie zawsze pozostawia liczbę całkowitą. To daje **równanie** postaci (liczba całkowita) $\times x =$ (liczba całkowita), a dzielenie daje **ułamek**. (d) π nie jest **ułamkiem**, a część (c) pokazuje, że każdy **ułamek okresowy** nim jest. Zatem żaden **ułamek okresowy** nie może być równy π : jego **cyfry** ciągną się w nieskończoność, nigdy nie układając się w powtarzający się blok.

(a) Many answers. For example $0.2\dot{7}$ gives $99x = 27$, so $x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$; any two-digit block that is a multiple of 9 but not of 11 will do. (b) $\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$, and checking: $100x - 10x = 83 - 8 = 75$, so $90x = 75$ and $x = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$. (c) Yes. Whatever the decimal, shifting it by the length of the repeating block always produces a second number with an identical tail, so the subtraction always leaves a whole number. That gives an **equation** of the form (whole number) $\times x =$ (whole number), and dividing gives a **fraction**. (d) π is not a **fraction**, and part (c) shows that every **recurring decimal** is one. So no **recurring decimal** can equal π : its **digits** go on forever without ever settling into a repeating block.