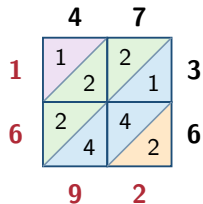


Krata mnożenie

Lattice Multiplication

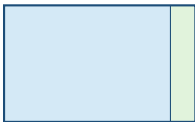


Dokąd zmierzamy

Where we are going

1. Pole

1. Area



Mnożenie to znajdowanie pola prostokąta.

Multiplying is finding the area of a rectangle.

2. Metoda siatki

2. Grid method

×	20	3
10	200	30
4	80	12

Prostokąt zapisany jako tabela. Każde zero pokazane.

The rectangle written as a table. Every zero shown.

3. Krata

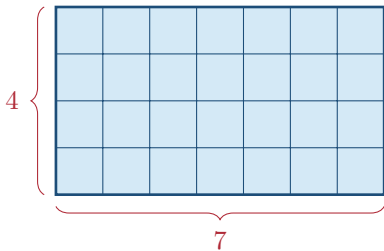
3. Lattice



Te same iloczyny, z przekątnymi wykonującymi wartość pozycyjną.

The same products, with the diagonals doing the place value.

Mnożenie to pole
Multiplication is area

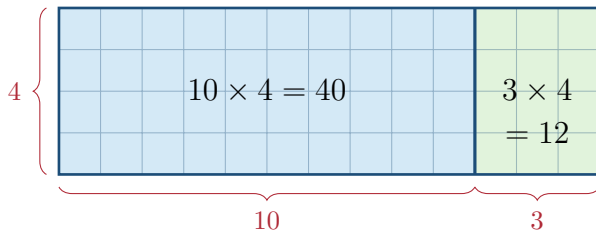


- Prostokąt o szerokości 7 i wysokości 4.
A rectangle 7 wide and 4 tall.
- Policz kwadraty: $7 \times 4 = 28$.
Count the squares: $7 \times 4 = 28$.

Każde pytanie o mnożenie można przedstawić jako prostokąt.
Every multiplication question can be represented as a rectangle.

Pocięcie prostokąta

Chopping the rectangle up



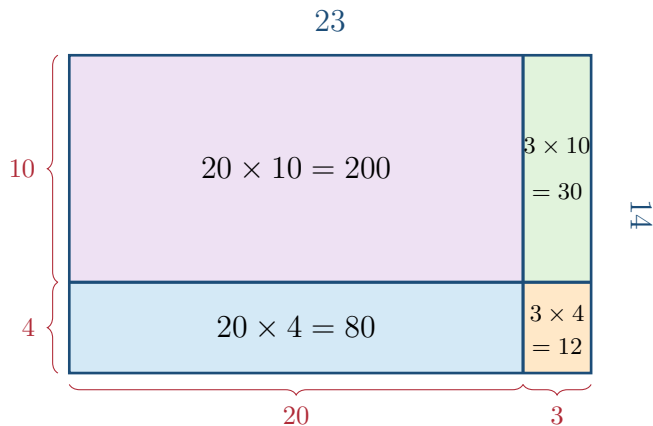
$$13 \times 4 = (10 \times 4) + (3 \times 4) = 40 + 12 = 52$$

Dzielimy 13 na części, które możemy faktycznie pomnożyć w głowie: jej dziesiątki i jednostki.

We split 13 into the parts we can actually multiply in our heads: its *tens* and its *units*.

Dwie cyfry przez dwie cyfry: cztery części

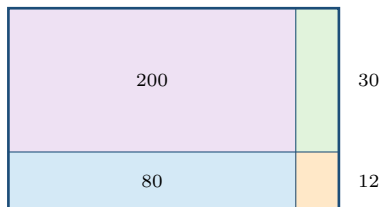
Two digits by two digits: four pieces



$$23 \times 14 = 200 + 30 + 80 + 12 = 322$$

Ten sam prostokąt, zapisany jako siatka

The same rectangle, written as a grid



×	20	3
10	200	30
4	80	12

$$200 + 30 + 80 + 12 = 322$$

- Siatka jest jak obrazek, ale nie jest narysowana w skali.

The grid is like the picture, but not drawn to scale.

Zachowaj każde zero

Keep every zero

$\times$	40	7
30	1200	210
6	240	42

$$4 \times 3 = 12 \quad \text{so } 40 \times 30 = 1200$$

$$4 \times 6 = 24 \quad \text{so } 40 \times 6 = 240$$

$$7 \times 3 = 21 \quad \text{so } 7 \times 30 = 210$$

$$7 \times 6 = 42 \quad \text{so } 7 \times 6 = 42$$

$$1200 + 240 + 210 + 42 = 1692, \text{ więc } 47 \times 36 = 1692$$

$$1200 + 240 + 210 + 42 = 1692, \text{ so } 47 \times 36 = 1692$$

Twoja kolej: metoda siatki

Your turn: grid method

(a) $34 \times 12 =$

(b) $26 \times 45 =$

(c) $53 \times 27 =$

(d) $18 \times 63 =$

(e) $72 \times 84 =$

(f) $95 \times 48 =$

Wyzwanie. 124×36 . Ile pól
potrzebuje teraz twoja siatka i
dlaczego?

Challenge. 124×36 . How many boxes
does your grid need now, and why?

×		

Odpowiedź:

Answer:

Twoja kolej: metoda siatki

Your turn: grid method

(a) $34 \times 12 = 408$

(b) $26 \times 45 = 1170$

(c) $53 \times 27 = 1431$

(d) $18 \times 63 = 1134$

(e) $72 \times 84 = 6048$

(f) $95 \times 48 = 4560$

Wyzwanie. 124×36 . Ile pól
potrzebuje teraz twoja siatka i
dlaczego?

$\times$		

Challenge. 124×36 . How many boxes
does your grid need now, and why?

Odpowiedź: $3 \times 2 = 6$ pól, po jednym
dla każdej pary wartości
pozycyjnych; $124 \times 36 = 4464$

Answer: $3 \times 2 = 6$ boxes, one for each pair
of place values; $124 \times 36 = 4464$

Problem z siatką

The problem with the grid

$\times$	300	40	7
600	180000	24000	4200
50	15000	2000	350
8	2400	320	56

- Metoda jest dobra dla większych liczb...

The method is fine for bigger numbers...

- Ale to dużo pisania długich liczb

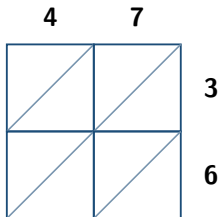
But it is a lot of writing long numbers

Krata zachowuje te same dziewięć iloczynów, ale zapisuje tylko cyfry — i używa przekątnych zamiast zer, aby śledzić wartość pozycyjną.

Lattice keeps the same nine products but writes only the digits — and uses *diagonals* instead of zeros to keep track of place value.

Budowanie kraty: krok 1, narysuj ją

Building a lattice: step 1, draw it



- 47×36 .
- Jedna kolumna dla każdej cyfry 47, zapisana na górze.
One *column* for each *digit* of 47, written across the top.
- Jeden wiersz dla każdej cyfry 36, zapisany po prawej.
One *row* for each *digit* of 36, written down the right.
- Narysuj przekątną w każdej komórce, biegnącą od prawego górnego do lewego dolnego rogu.
Draw a *diagonal* in every cell, running from top-right down to bottom-left.

Krok 2: wypełnij każdą komórkę faktem z tabliczki mnożenia

Step 2: fill every cell with a times table fact

4	7	
1 / 2	2 / 1	3
2 / 4	4 / 2	6

- Pomnóż każdą z kombinacji cyfr w odpowiedniej komórce.
Multiply each of the combinations of digits in the relevant cell.
- Dziesiątki idą w lewym górnym trójkącie, jednostki w prawym dolnym.
Tens go in the upper-left triangle, units in the lower-right.

$$4 \times 3 = 12 \rightarrow \boxed{1} / \boxed{2}$$

$$7 \times 3 = 21 \rightarrow \boxed{2} / \boxed{1}$$

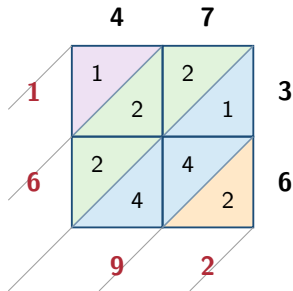
$$4 \times 6 = 24 \rightarrow \boxed{2} / \boxed{4}$$

$$7 \times 6 = 42 \rightarrow \boxed{4} / \boxed{2}$$

Odpowiedź jednocyfrowa, taka jak $3 \times 3 = 6$

Krok 3: dodawaj wzdłuż przekątnych

Step 3: add along the diagonals



Zacznij od prawego dolnego rogu i pracuj w górę pasów.

Start at the bottom right and work up the strips.

Wiersze: jedności, dziesiątki, setki, tysiące.

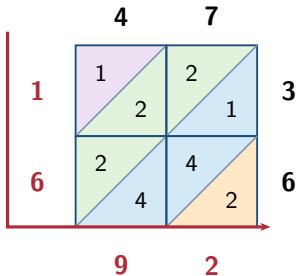
Rows: units, tens, hundreds, thousands.

units	2	= 2
tens	4 + 4 + 1	= 9
hundreds	2 + 2 + 2	= 6
thousands	1	= 1

- Każdy zacieniowany pas to jedna kolumna wartości pozycyjnej.
Each shaded strip is one place value column.

Krok 4: odczytaj odpowiedź w dół po lewej i wzdłuż dołu

Step 4: read the answer down the left and along the bottom



- Czytaj w dół po lewej stronie, potem wzdłuż dołu.

Read down the left-hand side, then along the bottom.

- 1, 6, 9, 2

$$47 \times 36 = 1692$$

Porównaj z metodą **siatki**:

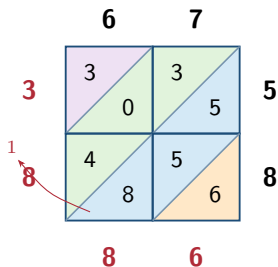
$1200 + 240 + 210 + 42 = 1692$. to te same cztery **iloczyny**, ta sama odpowiedź — ale bez długiego dodawania.

Compare with the **grid** method:

$1200 + 240 + 210 + 42 = 1692$. its the same four **products**, the same answer — but no long addition.

Co jeśli przekątna dodaje więcej niż 9?

What if a diagonal adds to more than 9?



$$67 \times 58$$

Wiersze: jedności, dziesiątki, setki, tysiące.

W wierszu dziesiątek: zapisz 8, przenieś 1.

Rows: units, tens, hundreds, thousands. In the tens row: write 8, carry 1.

units	6	= 6
tens	5 + 8 + 5	= 18 write 8, carry 1
hundreds	4 + 3 + 0 + 1	= 8
thousands	3	= 3

- Jeśli pas sumuje się do 10 lub więcej, zapisz cyfrę jedności i przenieś dziesiątki do następnego pasa w lewo w górę

Dlaczego przekątne działają?

Why do the diagonals work?

Etykiety: Th = tysiące, H = setki, T = dziesiątki, U = jednostki.

Labels: Th = thousands, H = hundreds, T = tens, U = units.

	4	7	
Th	1 2	2 1	3
H	2 4	4 6	6

- Lewa górna komórka naprawdę oznacza $40 \times 30 = 1200$, tj. **12 setek**.

The top-left cell really means $40 \times 30 = 1200$, i.e. **12 hundreds**.

- Jej 2 leży na przekątnej setek, a jej 1 leży o jedną przekątną dalej w lewo — tysiące. Dokładnie tak.

Its 2 sits on the **hundreds diagonal** and its 1 sits one **diagonal** further left — the **thousands**.

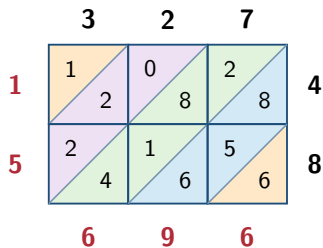
Exactly right.

- Każdy krok w lewo lub w górę w **kracie** mnoży przez 10; oba ruchy przesuwają cię o jedną **przekątną**.

Every step you move *left* or *up* in the **lattice** multiplies by 10; both moves shift you one

Większa kratka: 327×48

A bigger lattice: 327×48



Wiersze: jednostki, dziesiątki, setki, tysiące, dziesiątki tysięcy.

Rows: units, tens, hundreds, thousands, ten thousands.

units	6	= 6
tens	5 + 6 + 8	= 19 → 9, carry 1
hundreds	1 + 4 + 2 + 8 + 1	= 16 → 6, carry 1
thousands	2 + 0 + 2 + 1	= 5
ten thous.	1	= 1

- Trzy cyfry przez dwie cyfry $\Rightarrow$ kratka 3×2 .

Three digits by two digits $\Rightarrow$ a 3×2 lattice

Twoja kolej: **krata**

Your turn: **lattice**

(a) $38 \times 24 =$

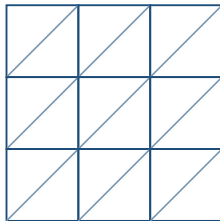
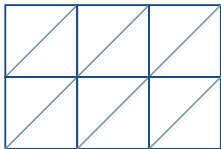
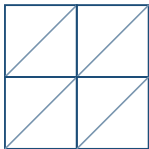
(b) $65 \times 43 =$

(c) $57 \times 89 =$

(d) $127 \times 36 =$

(e) $408 \times 57 =$

(f) $234 \times 156 =$



Twoja kolej: **krata**

Your turn: **lattice**

(a) $38 \times 24 = 912$

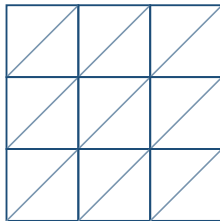
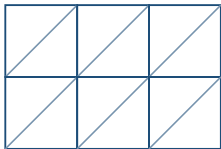
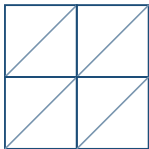
(b) $65 \times 43 = 2795$

(c) $57 \times 89 = 5073$

(d) $127 \times 36 = 4572$

(e) $408 \times 57 = 23\,256$

(f) $234 \times 156 = 36\,504$



A teraz przecinek dziesiętny

And now the decimal point

Najpierw: zawsze oszacowanie

First: always estimate

$$4.7 \times 3.6$$

Odpowiedź jest około 20. ✓ jedyna blisko 20.

the answer is about 20. ✓ the only one near 20.

$$4.7 \approx 5 \quad 3.6 \approx 4 \quad \Rightarrow \quad \text{the answer is about } 20$$

1.692

16.92

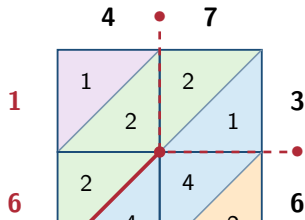
169.2

✓ the only one near 20

- Krata da cyfry 1 6 9 2 niezależnie od tego, co robią przecinki dziesiętne.
Lattice will give the digits 1 6 9 2 whatever the decimal points are doing.
- Musimy tylko ustalić, gdzie trafia przecinek dziesiętny.

Zasada przecinka dziesiętnego

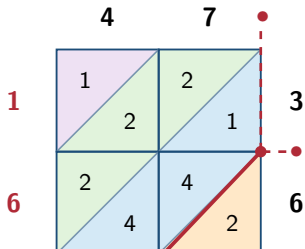
The decimal point rule



1. Zignoruj przecinki dziesiętne i zbuduj kratę z cyfr: 47 i 36.
Ignore the decimal points and build the lattice from the digits: 47 and 36.
2. Zaznacz przecinek dziesiętny górnej liczby na górnej krawędzi, a liczby bocznej na prawej krawędzi.
Mark the decimal point of the top number on the top edge, and of the side number on the right edge.
3. Przesuń jeden w dół, a drugi w poprzek, aż się spotkają.
Slide one *down* and the other *across* until they *meet*.

Ta sama kratka, inny przecinek dziesiętny
Same lattice, different decimal point

$$47 \times 3.6$$



- 47 nie ma zapisanego przecinka dziesiętnego, więc znajduje się na skrajnej prawej górnej krawędzi.
47 has no decimal point written, so it sits at the **far right** of the top edge.
- 3.6 umieszcza swój przecinek między dwoma wierszami, jak poprzednio.
3.6 puts its point between the two rows, as before.
- Spotykają się niżej, więc przekątna opuszcza kratę o jedno miejsce dalej w prawo.

Szybka kontrola: policz miejsca dziesiętne

The quick check: count the decimal places

Policz miejsca dziesiętne.

Count the decimal places.

$$4.7 \times 3.6 \quad 1 + 1 = 2 \text{ places} \quad \Rightarrow 16.92$$

$$47 \times 3.6 \quad 0 + 1 = 1 \text{ place} \quad \Rightarrow 169.2$$

$$0.47 \times 3.6 \quad 2 + 1 = 3 \text{ places} \quad \Rightarrow 1.692$$

$$0.47 \times 0.36 \quad 2 + 2 = 4 \text{ places} \quad \Rightarrow 0.1692$$

- Cyfry 1692 pochodzą z tej samej kraty za każdym razem.

The digits 1692 come from the same lattice every single time.

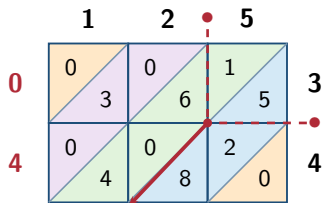
- Całkowita liczba miejsc dziesiętnych w pytaniu = miejsca dziesiętne w odpowiedzi.

Total decimal places in the question = decimal places in the answer.

- Zasada umiarkowości i zasada liczenia zawsze się sprawdzają – ułóżmy sobie

Rozwiązany przykład: 12.5×3.4

Worked example: 12.5×3.4



Wiersze: jedności, dziesiątki, setki, tysiące, dziesiątki tysięcy.

Rows: units, tens, hundreds, thousands, ten thousands.

units	0	= 0
tens	$2 + 8 + 5$	= 15 → 5, carry 1
hundreds	$0 + 4 + 1 + 6 + 1$	= 12 → 2, carry 1
thousands	$0 + 0 + 3 + 1$	= 4
ten thous.	0	= 0

- Cyfry: $125 \times 34 = 4250$.
Digits: $125 \times 34 = 4250$.

- Przecinki mnożenia się na 2 na prawo

Twoja kolej: ułamki dziesiętne

Your turn: decimals

(a) $2.4 \times 3.7 =$

(b) $6.3 \times 0.8 =$

(c) $5.2 \times 4.6 =$

(d) $0.46 \times 2.3 =$

(e) $13.4 \times 2.5 =$

(f) $0.85 \times 0.64 =$

Dla każdego zapisz swoje oszacowanie przed rozpoczęciem.

For each one, write your estimate before you start.

Wyzwanie 1. 1.25×0.48 . Dlaczego odpowiedź potrzebuje mniej cyfr niż oczekujesz?

Challenge 1. 1.25×0.48 . Why does the answer need fewer digits than you expect?

Wyzwanie 2. Krata dla $\square.\square \times 4.5$ daje cyfry 2 7 9 0 i odpowiedź 27.90. Jaka była pierwsza liczba?

Challenge 2. A lattice for $\square.\square \times 4.5$ gives the digits 2 7 9 0 and the answer 27.90.

Twoja kolej: ułamki dziesiętne

Your turn: decimals

(a) $2.4 \times 3.7 = 8.88$

(b) $6.3 \times 0.8 = 5.04$

(c) $5.2 \times 4.6 = 23.92$

(d) $0.46 \times 2.3 = 1.058$

(e) $13.4 \times 2.5 = 33.5$

(f) $0.85 \times 0.64 = 0.544$

Dla każdego zapisz swoje oszacowanie przed rozpoczęciem.

For each one, write your estimate before you start.

Wyzwanie 1. 1.25×0.48 . Dlaczego odpowiedź potrzebuje mniej cyfr niż oczekujesz? $= 0.6$; krata daje 6000 i zera końcowe znikają.

Challenge 1. 1.25×0.48 . Why does the answer need fewer digits than you expect?
 $= 0.6$; the lattice gives 6000 and the trailing zeros disappear.

Wyzwanie 2. Krata dla $\square.\square \times 4.5$ daje cyfry 2790 i odpowiedź 27.90. Jaka była pierwsza liczba? 6.2

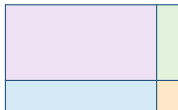
Challenge 2. A lattice for $\square.\square \times 4.5$ gives the digits 2790 and the answer 27.90.

Podsumowanie

Summary

Pole

Area



Podziel każdą liczbę na wartości pozycyjne; cztery pola to cztery iloczyny.

Split each number into place values; the four areas are the four products.

Siatka

Grid

×	40	7
30	1200	210
6	240	42

Każde zero zapisane.
Niezawodne, ale na końcu długie dodawanie.

Every zero written out.
Reliable, but a long addition at the end.

Krata

Lattice

1 2	2 1
2 4	4 2

Tylko cyfry. Przekątne przenoszą wartość pozycyjną. Czytaj w dół, potem w poprzek.

Digits only. The diagonals carry the place value. Read down, then across.

- Dziesiątki w lewym górnym trójkącie, jednostki w prawym dolnym.

Tens in the upper-left triangle, units in the lower-right.